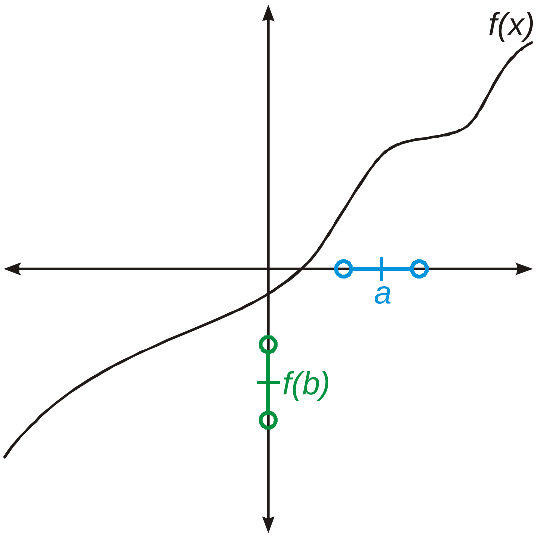
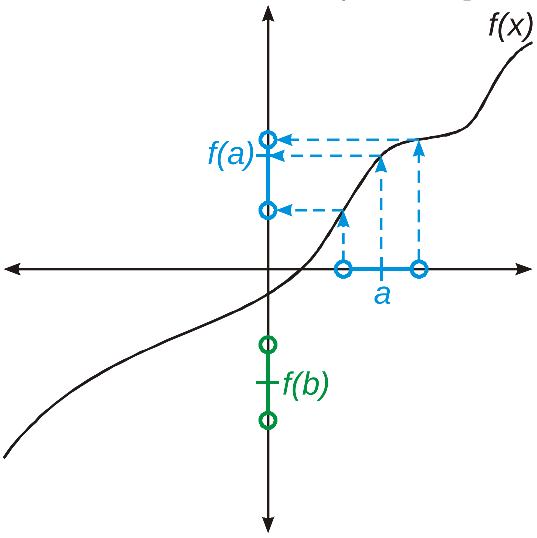
10.1.6 Spojitost funkce v bodě, spojitost funkce v intervalu

Předpoklady: 10104, 10105

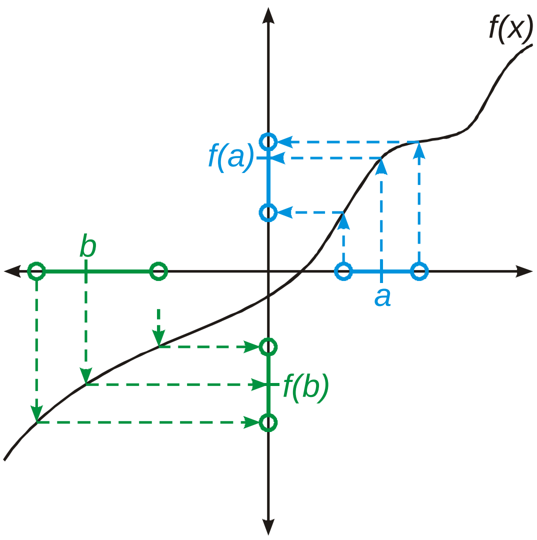
Př. 1: Nakresli, jak funkce $f(x)$ daná grafem zobrazí vyznačené okolí bodu *a* na ose *x* na osu *y*. Poté nakresli na osu *x* vzor okolí bodu $f(b)$ nakresleného na ose *y*.



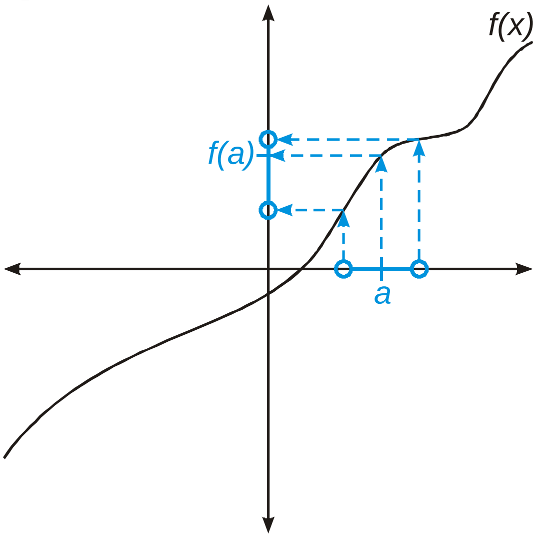
Obraz okolí bodu *a* na ose *y* určíme pomocí obrazu krajních bodů tohoto okolí:

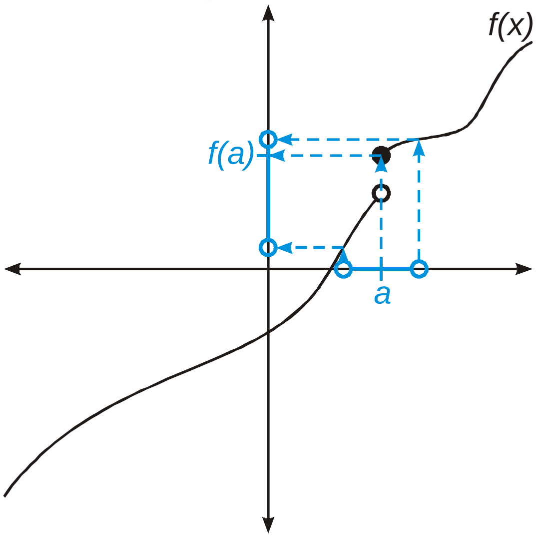


Obdobně najdeme na ose vzor okolí bodu $f(b)$.

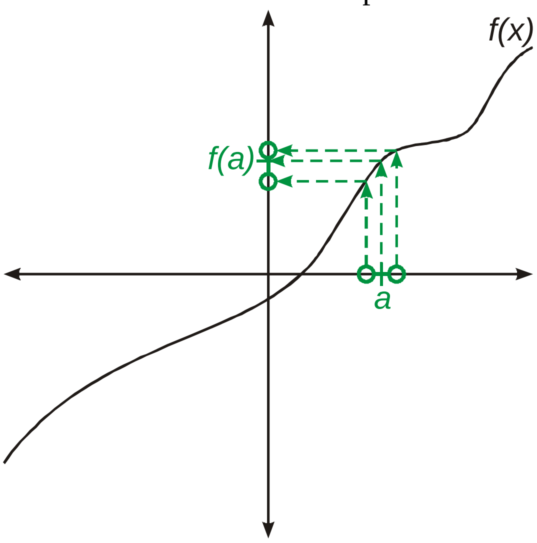


Jak pomocí zobrazování okolíček rozlišíme spojitou funkci od nespojité?

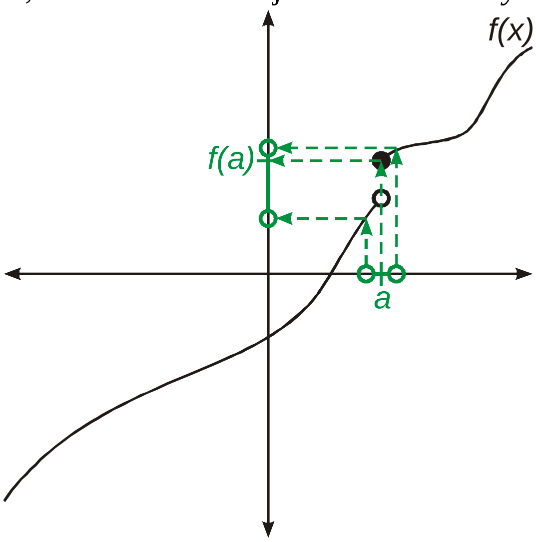




Pokud budeme zmenšovat poloměr okolí bodu *a*, bude zmenšovat i jeho obraz na ose *y*

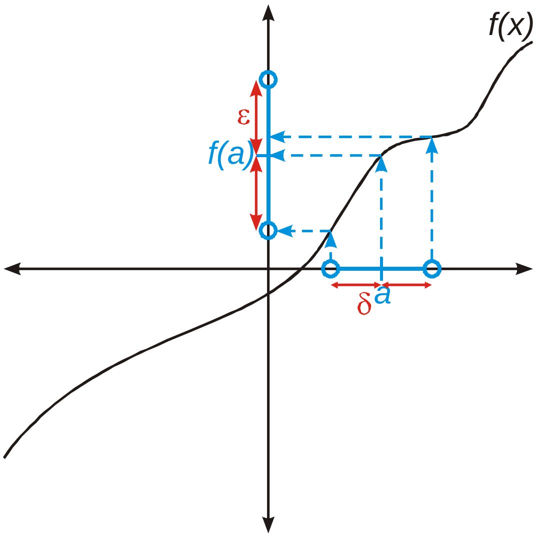


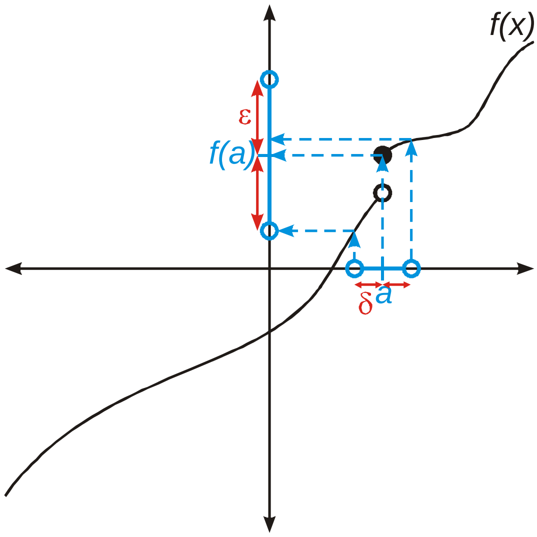
Když se bude poloměr okolí bodu *a* zmenšovat k nule, bude k nule zmenšovat i velikost obrazu na ose *y*.



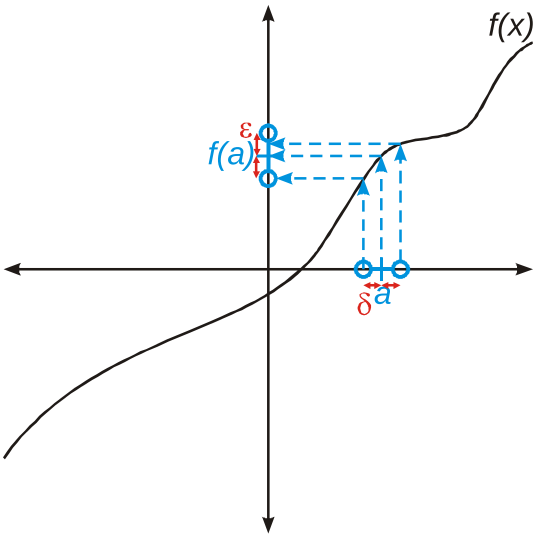
Kvůli díře, kterou způsobuje nespojitost, se velikost obrazu nezmenší k nule a bude minimálně tak velká jako díra.

Při definici spojitosti postupujeme z druhé strany: nakreslíme si na osu *y* okolí kolem bodu $f\left(a\right)$ a hledáme okolí bodu *a* tak, aby se celé zobrazilo do vyznačeného okolí na ose *y*:



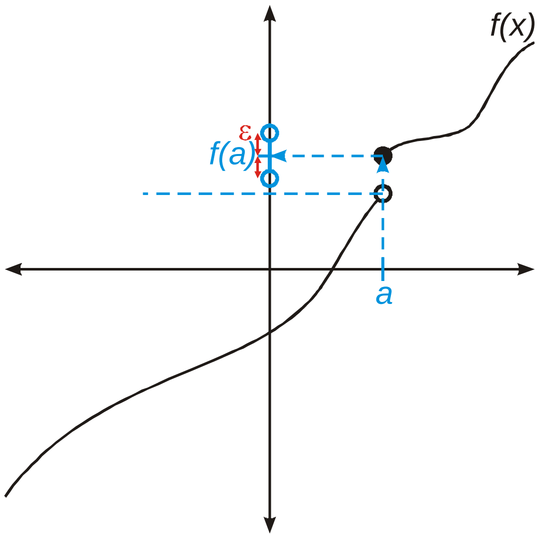


Zvolíme si na ose *y* okolí $\mathbf{U}_{\varepsilon}\left(f\left(a\right)\right)$ a hledáme na ose *x* okolí $\mathbf{U}_{\delta}\left(a\right)$, které funkce zobrazí do okolí $\mathbf{U}_{\varepsilon}\left(f\left(a\right)\right)$.



Ať zvolíme ε jakkoliv malé, vždy se nám podaří najít δ takové, aby se $\mathbf{U}_{\delta}\left(a\right)$ zobrazilo do $\mathbf{U}_{\varepsilon}\left(f\left(a\right)\right)$.

Pro libovolně malé $\mathbf{U}_{\varepsilon}\left(f\left(a\right)\right)$ najdeme takové $\mathbf{U}_{\delta}\left(a\right)$, které se celé zobrazí do $\mathbf{U}_{\varepsilon}\left(f\left(a\right)\right)$



Když zvolíme ε menší než je velikost díry, nepodaří se nám najít δ takové, aby se $\mathbf{U}_{\delta}\left(a\right)$ zobrazilo do $\mathbf{U}_{\varepsilon}\left(f\left(a\right)\right)$ (v našem případě, se i neznatelně menší čísla než *a* zobrazí pod díru a tedy mimo $\mathbf{U}_{\varepsilon}\left(f\left(a\right)\right)$.

to se nám opravdu nepodaří

$\Rightarrow$ definice spojitosti v bodě:

Funkce *f* je spojitá v bodě *a*, jestliže k libovolně zvolenému ε-okolí bodu $f\left(a\right)$, existuje takové δ-okolí bodu *a*, že pro všechna *x* z tohoto okolí bodu *a* patří hodnoty $f\left(x\right)$ do zvoleného okolí bodu $f\left(a\right)$.

Vyjádření pomocí nerovnic s absolutní hodnotou:

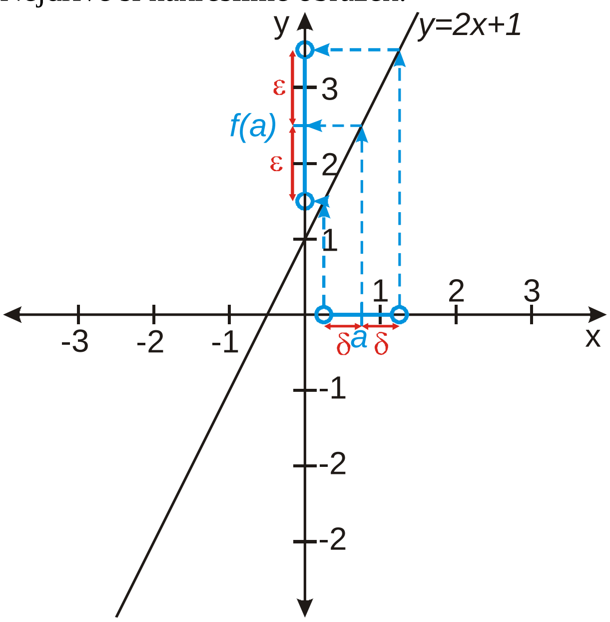
Funkce *f* je spojitá v bodě *a*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna reálná *x* platí: je-li $|x-a| < \delta$, pak $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Z definic je zřejmé, že nemá cenu uvažovat o spojitosti v bodech, ve kterých (nebo v jejichž okolí) není funkce definována.

Dodatek: Opravdu matematicky úsporně vypadá definice spojitosti takto:
Funkce *f* je spojitá v bodě $a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in R$,
$(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$.

Pedagogická poznámka: Dokazovat spojitost funkce $y = 2x + 1$ na první pohled vypadá zcela nesmyslně, ale oproti funkcím $y = c$ a $y = x$ je při důkazu, alespoň něco vidět a důkaz není tak obtížný jako u funkce $y = \sin x$.

Jak se dá dokázat, že funkce $y = 2x + 1$ je spojitá v každém bodě?
Nejdříve si nakreslíme obrázek:



Zdá se, že $\mathbf{U}_\delta(a)$ najdeme pro libovolně malé $\mathbf{U}_\varepsilon(f(a))$, z obrázku se zdá, že platí $\delta \le \frac{\varepsilon}{2}$.

Teď to zkusíme početně. Zvolíme si libovolné ε a musíme k němu najít δ.
Neurčujeme si žádný speciální bod za $x \Rightarrow$ pokud to dokážeme, výsledek bude platit pro všechna *x*.
Dosadíme si do podmínky pro $\mathbf{U}_\varepsilon(f(a))$ a úpravami zkusíme zjistit, jak by mělo vypadat
$\mathbf{U}_\delta(a)$: $|f(x) - f(a)| = |2x + 1 - (2a + 1)| < \varepsilon$.

Upravíme absolutní hodnotu: $|2x + 1 - 2a - 1| = |2x - 2a| = |2(x - a)| = 2|x - a| < \varepsilon$

$2|x - a| < \varepsilon$ v absolutní hodnotě už jsme získali výraz pro body z okolí na ose *x*

$|x-a|<\frac{\varepsilon}{2}=\delta \Rightarrow$ když si zvolíme na ose *y* libovolné ε okolí bodu $f(a)$, stačí když si uděláme na ose *x* kolem bodu *a* okolí s polovičním poloměrem, aby se všechny *x* z $\mathbf{U}_{\delta}(a)$ zobrazily do $\mathbf{U}_{\varepsilon}(f(a)) \Rightarrow$ dokázáno, funkce $y=2x+1$ je spojitá v každém bodě.

Další funkce, které jsou spojité v každém bodě:

- $y=c, c\in R$
- $y=x$
- $y=\sin x, y=\cos x$

Spojitost dalších funkcí je možné dokazovat pomocí následující věty:
Jsou-li funkce *f*, *g* spojité v bodě *a*, pak je také spojitou funkci v bodě *a* jejich: součet $f+g$, rozdíl $f-g$, součin $f\cdot g$ a je-li $g(a)\neq 0$ také jejich podíl $\frac{f}{g}$.

Př. 2: Pomocí definice spojitosti funkce *f* v bodě *a* zformuluj definici spojitosti funkce *f* v bodě *a* zprava.

Funkce *f* je v bodě *a* spojitá zprava, jestliže ke každému $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ tak, že pro všechna reálná *x* platí: je-li $x\in\langle a;a+\delta)$, pak $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

Pedagogická poznámka: Zcela samostatně sestaví definici jenom minimum studentů. Ostatním se snažím u tabule pomoci tím, že se bavíme o tom, jak jsme na grafech určovali spojitost nebo limitu zprava, která *x* pro nás pak byla zajímavá apod.

Př. 3: Pomocí definice spojitosti funkce *f* v bodě *a* zformuluj definici spojitosti funkce *f* v bodě *a* zleva.

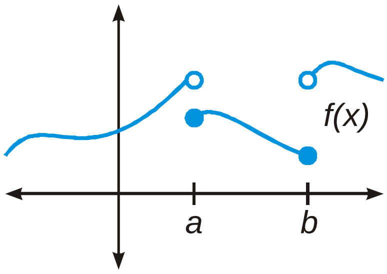
Funkce *f* je v bodě *a* spojitá zleva, jestliže ke každému $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ tak, že pro všechna reálná *x* platí: je-li $x\in(a-\delta;a\rangle$, pak $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

Platí věta, o které jsme si říkali již při kreslení obrázků:
Funkce *f* je spojitá v bodě *a*, právě když je v tomto bodě spojitá zprava i zleva.

Spojitost funkce není pouze bodová záležitost, sledujeme zda je funkce spojitá v intervalu.

Otevřený interval $(a;b)$ (neobsahuje krajní body):
Funkce *f* je spojitá v intervalu $(a;b)$, jeli spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

Jak vypadá funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a;b\rangle$.



Př. 4: Vyslov definici funkce spojité v uzavřeném intervalu $\langle a;b \rangle$.

$\langle a;b \rangle$ - uzavřený interval, body *a*, *b* do něj patří

Funkce *f* je spojitá v intervalu $\langle a;b \rangle$, jeli spojitá v intervalu $(a;b)$, v bodě *a* zprava a v bodě *b* zleva.

S pomocí předchozích vět je možné rozšířit seznam spojitých funkcí:

- $y = a^x$, $y = \log_a x$ jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru
- $y = \sqrt[n]{x}, n \in N$ je pro liché *n* spojitá v R, pro sudé v intervalu $(0;\infty)$.

Shrnutí: Spojitost funkce v bodě *a* definujeme pomocí zobrazování velmi malých okolí bodu *a*.